

# 多面函数拟合在区域地面垂直运动分析中的应用

李光明 何万平 林志彬

厦门地震勘测研究中心

DOI:10.32629/gmsm.v2i5.317

**[摘要]** 本文介绍了多面函数的基本数学模型,核函数及平滑因子,通过实际试算得出倒双曲函数的有利性。利用厦门岛内外一等水准观测资料(2000年~2016年),分别平差后得出历年的监测点高程成果。然后根据水准重复观测点的垂直运动速率拟合出厦门区域的垂直运动速率面,说明多面函数在区域地面垂直运动分析中的应用,最后指出在应用过程中需注意的问题及实用价值。

**[关键词]** 多面函数;核函数;平滑因子;垂直运动速率面

## 引言

地壳运动一般可分为地壳水平运动和地壳垂直运动,正确地定量描述地壳垂直运动是地壳垂直运动研究的基本任务之一。对研究现代地壳垂直运动而言,到目前为止,最精确可靠的方法仍是利用重复高精度水准测量资料进行动态平差,以获得各水准重合点的垂直运动速率<sup>[1]</sup>。要研究整个地区的连续趋势变化,就需要建立起整个地区的连续变形曲面(速率面),则观测点就是这个连续曲面上的采样点<sup>[2][3]</sup>。即根据各单个水准重复观测点的垂直运动速率,应用最小二乘原理最佳地确定曲面函数模型的参数,拟合出整个地区的地壳垂直运动形变速率面<sup>[4]</sup>。

地壳垂直运动十分复杂,到目前为止,我们无法得到这个曲面的严格解析形式,但在数学上,任何一个连续曲面总可以用一系列简单的数学曲面叠加,以任意精度逼近,从而得到满足实际需要的表达式。

曲面拟合主要有多项式曲面拟合法、多面函数法、曲面样条拟合法、移动曲面拟合法等。多面函数拟合法,1971年由美国哈笛(Hardy)提出。1976年将此法应用于美国大地测量、拟合重力异常、大地水准面差距、垂线偏差等,1978年将此法用于地壳形变。它的基本思想是任何一个规则或不规则的连续曲面均可以由若干简单面(或称单值数学面)来叠加逼近。具体做法是在每个数据点上建立一个曲面,然后在垂直方向上将各个旋转曲面按一定比例叠加成一张整体的连续曲面,使之严格地通过各个数据点。

## 1 多面函数

### 1.1 数学模型

多面函数的模型为:

$$\xi(x,y) = \sum_{j=1}^k a_j Q(x,y,x_j,y_j) \quad (1)$$

式中为待定参数,为核函数:

$$Q(x,y,x_j,y_j) = [(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + \delta^2]^b \quad (2)$$

式中 $\delta$ 为平滑因子, $b$ 为可选择的非零实数。 $(x,y)$ 为核函数的控制点, $(x_j,y_j)$ 为核函数的中心点。若有 $n$ 个数据点

作为控制点,并将其中 $k$ 个数据点作为核函数的中心点,令 $Q_{ij} = Q(x_i,y_i,x_j,y_j)$ ,则式(1)变成:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^k a_j Q_{ij} \quad (3)$$

由此可列出误差方程式:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

在最小二乘的原则下,可求得待定系数:

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_k)^T = (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\xi} \quad (6)$$

式中 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ ,任意点 $m$ 的内插值为:

$$\xi_m = [Q_{m1} \quad Q_{m2} \quad \cdots \quad Q_{mk}] [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_k]^T = \mathbf{Q}_m \mathbf{A} \quad (7)$$

## 1.2 核函数

多面函数拟合中核函数 $Q(x,y,x_j,y_j)$ 的选取及核函数的平滑因子 $\delta$ 的取值都会对拟合效果产生一定影响。核函数主要有下面几种形式:

### 1.2.1 正双曲面函数

$$Q(x,y,x_j,y_j) = [(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + \delta^2]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

### 1.2.2 倒双曲面函数

$$Q(x,y,x_j,y_j) = [(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + \delta^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

### 1.2.3 三次曲面函数

$$Q(x,y,x_j,y_j) = [(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + \delta^2]^{\frac{3}{2}} \quad (10)$$

核函数的性状对于拟合的好坏和内插预测的效果有直接影响。判断核函数优劣的原则大致为:必须保证使得问题有解;对于已测点上的运动速率有良好的拟合效果;拟合值与实测值之间不应有系统性偏差;对于未测点的预测值较为平稳,不至于在拟合点偏离数据点时,内插值有急剧的变化。

# Geological mining surveying and mapping

平滑因子  $\delta$  的选取将改变核函数的平滑程度,  $\delta$  越大, 核函数越平缓, 反之则越陡峭。因此在选定了核函数之后平滑因子会影响拟合的效果, 不同的核函数对平滑因子的敏感程度也不相同, 过去多位专家学者对此进行了研究, 有认为合适的选取式为  $10D \leq \delta^2 \leq 100D$  [1], 其中  $D$  为核函数间的平均间距, 也有认为  $0.1D \leq \delta^2 \leq 1.0D$  比较合适 [2], 因此实际中需根据拟合数据的平滑程度通过试算进行合适选取。

## 2 应用分析

厦门地区人口稠密, 经济发达, 又处于长乐-诏安断裂带, 因此研究地壳运动非常有必要。厦门区域监测水准网网形为13条水准路线, 分岛内(8条)和岛外(5条)两个部分, 共构成12个闭合环(如图1), 对厦门地区的沉降变化有很好的监测作用。中心从1972年开始, 每年对厦门地震监测水准网进行一等水准观测, 累计了大量的高精度水准资料。由于各点分布较为零散, 而且各点的运动与空间和时间均有一定相关性, 因此需求出各重复观测点的垂直运动速率, 利用多面函数拟合出区域垂直运动速率面模型, 从而加以分析。

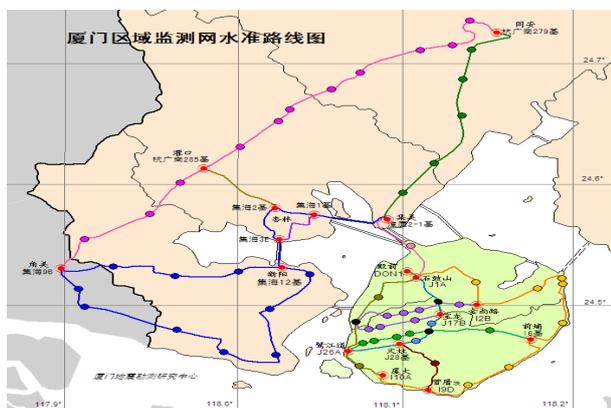


图1 厦门监测网水准路线图

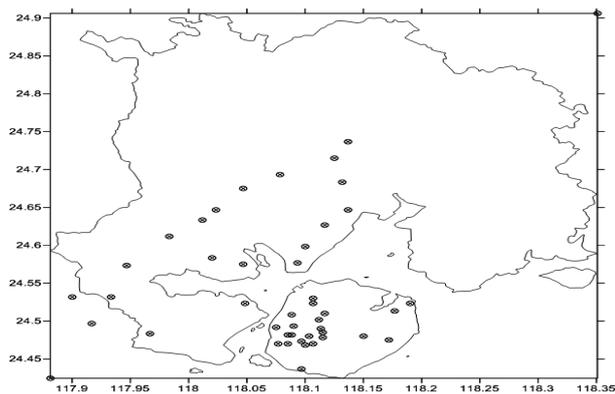


图2 重复观测点点位分布图

下面以某一年数据为例来分析多面函数在实际中的应用。图2为重复观测点的点位分布图(由于每年都有一些点遭破坏, 重复观测点是指没有破坏每年都有观测的点)。

### 2.1 核函数的选择

应用不同核函数会有不同的拟合效果, 一般来说倒双曲函数的效果会好一些, 下面通过实际算例加以说明。如图2

所示共有43个重复观测点

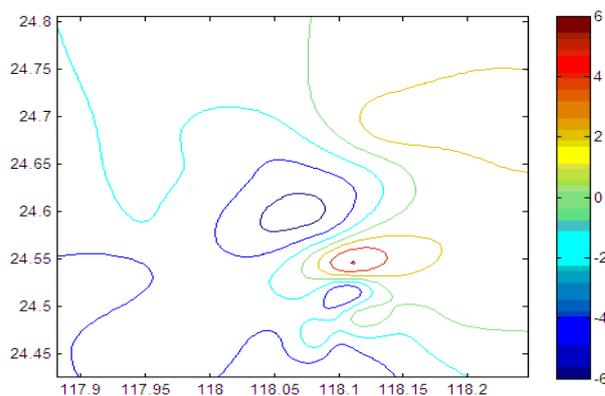
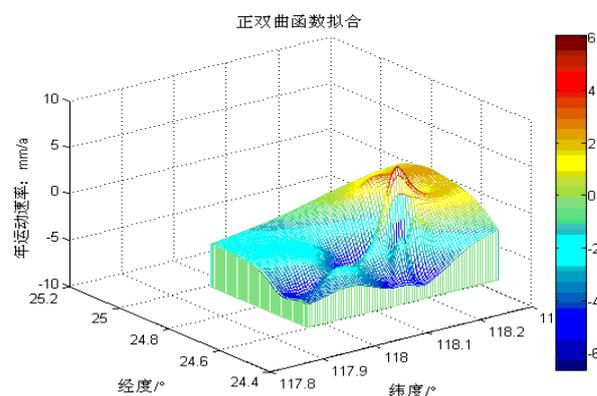


图3 核函数为正双曲函数的拟合面和等值线图

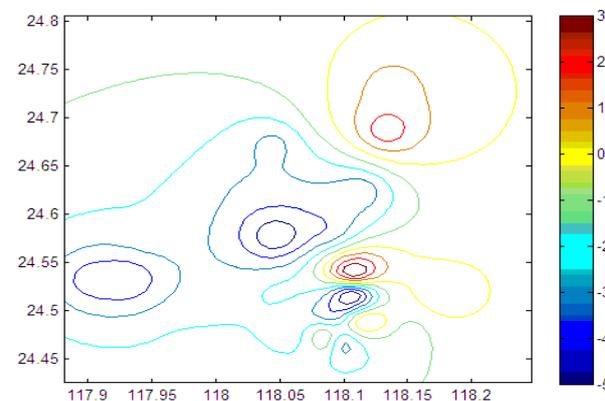
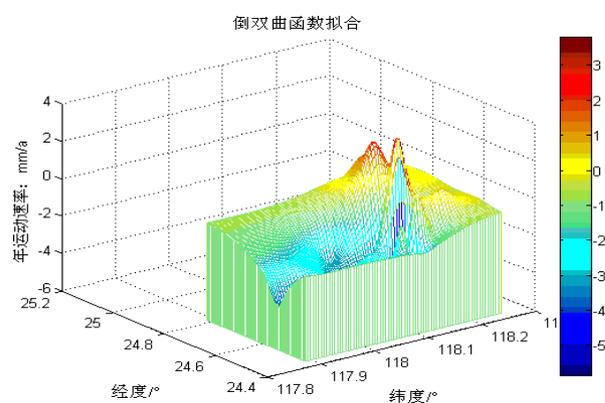


图4 核函数为倒双曲函数的拟合面和等值线图

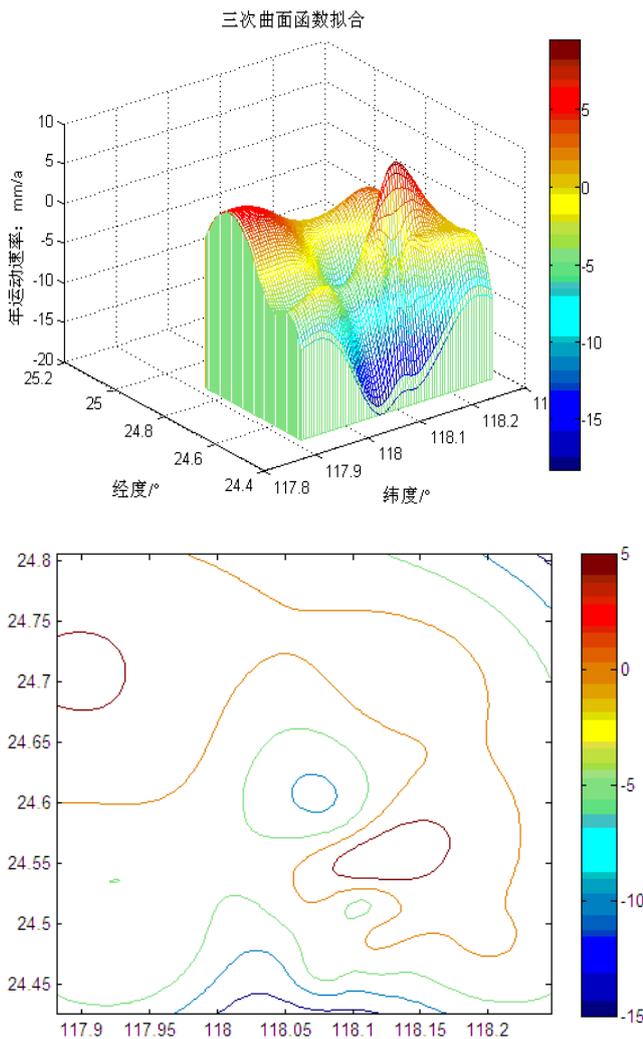


图5 核函数为三次曲面函数的拟合面和等值线图

取其中31个点作为控制点和中心点, 另外12个作为拟合检核之用, 由于多面函数中心点和控制点一样, 多面函数拟合曲面严格经过每一个数据点, 所以内符合精度显然为零, 外符合精度如表1所示。由图3, 图4, 图5和表1:

表1 不同核函数拟合的外符合精度

核函数	正双曲函数	倒双曲函数	三次曲面函数
外符合精度/mm	0.52	0.86	1.49

可知, 尽管不同核函数拟合面的总体趋势大致相同, 但是倒双曲函数显得更加平缓, 更符合实际变化情况, 从拟合精度上来看显然也是倒双曲函数更为好一些, 因此一般情况下核函数可以选择倒双曲函数。

### 2.2 垂直运动速率曲面图

在利用动态平差求出各水准重复观测点的垂直运动速率后, 要分析整个区域的地面垂直运动情况, 则必须要知道整个区域的曲面, 即可利用多面函数拟合出厦门区域的地面垂直运动速率曲面。这里核函数采用倒双曲函数, 经试算选定合适的平滑因子。将上述的43个重复观测点全部作为控制

点进行求解参数, 确定区域垂直运动速率曲面的多面函数模型, 从而得出厦门地面垂直运动速率面图。

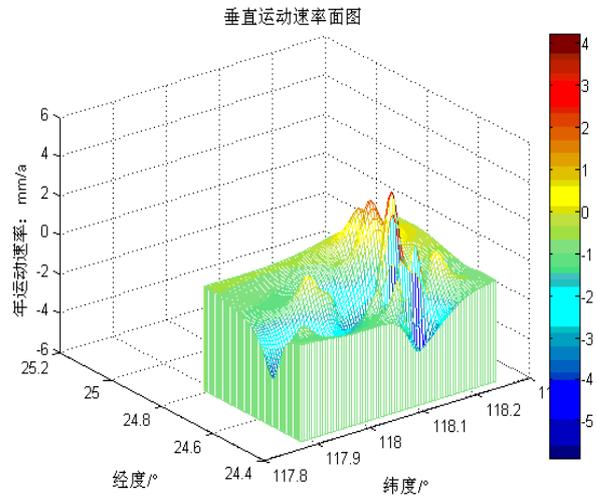


图6 厦门地区垂直运动速率面图

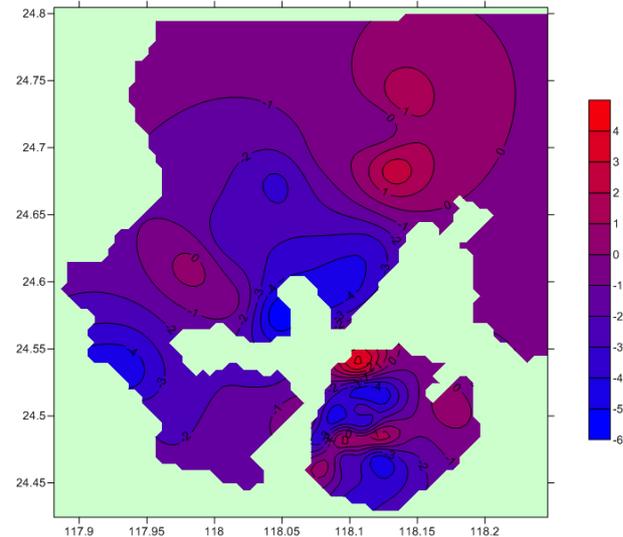


图7 厦门地区垂直运动速率等值线图

如图6、图7所示。分析上述两图易知, 厦门区域各个地方的沉降不均匀, 沿海高于内陆, 岛内沉降稍微活跃些。速率面很直观形象地反映了厦门地区地面的沉降情况, 结合多年数据可以有效地得出区域垂直运动的趋势, 因此多面函数拟合可以作为监视厦门地区的地面垂直运动分析的一种有效的数学方法。

### 3 结束语

通过上述分析可知, 多面函数可以作为研究区域地面垂直运动的一种有力的数学方法。但是在实际应用中应注意以下问题:

- (1) 选定合适的核函数, 一般来说, 倒双曲函数效果较好。
- (2) 需根据数据的平滑程度确定核函数的平滑因子, 可通过试算加以选定。

## Geological mining surveying and mapping

(3) 拟合的控制点和中心点可以一样,但是可以通过优化选择的方法选择适当的中心点,控制点最好分布在可以控制整个区域的地形特征和变化显著的地方。

(4) 对于各重复观测点的垂直运动速率可用动态平差的方法得出,这样可以得到比较可靠的数据源,拟合后的速率面更能体现实际运动情况。

(5) 对于不同核函数对拟合结果的影响可以通过去加权平均等方法,这有待于进一步讨论。

(6) 在计算过程中,对参与拟合的坐标可以考虑用直角坐标系,这样在数值上更能体现出位置的变化程度,还可以影响计算精度,具体影响可作进一步讨论。

通过文章讨论,首次将厦门水准的资料进行系统的处理分析,并用多面函数来研究,并且讨论了合适厦门地区的核函数,这些都是创新性的应用研究,意义主要有以下几个方面:

(1) 速率面很直观形象地反映了厦门地区地面的沉降情况,结合多年数据可以有效地得出区域垂直运动的趋势,因此多面函数拟合可以作为监视厦门地区的地面垂直运动分析的一种有效的数学方法,为以后的相关数据处理提供了新的思路和方法参考。

(2) 地震发生前的能量积聚包含了应力增强积累的过程,显然负相关的变化趋势应力积累较小,相反正相关的趋势变化是应力积累增强的过程。从垂直运动速率面趋势变化特征

来看,区域趋势变化正相关与地震发生应该存在一定的关系,以后需进一步加以验证。

(3) 厦门一等精密水准监测网基本能有效地反应了监测区域的地面垂直形变,高精度水准复测成果一方面可以用于实际的工程项目中,另一方面可以研究垂直形变与地震发生的相互关系的研究提供了大量的实验数据,最主要还可以为厦门地区的地震监测预报工作提供依据和参考。

**[参考文献]**

[1] 田晓,郑洪艳,苏广利.多面函数和移动法综合模型支持下的区域垂直形变场拟合[J].测绘通报,2018(2):41-45+88.

[2] 王文利,陈士银,董鸿闻,等.利用多面函数拟合中国大陆地垂直运动速率图[J].测绘通报,2002(08):6-8+11.

[3] 黄立人,陶本藻,赵承坤.多面函数拟合在地壳垂直运动研究中的应用[J].测绘学报,1993(01):25-32.

[4] 陶本藻,杜方.多面函数法研究鲜水河地区现今地壳垂直运动[J].武汉测绘科技大学学报,1991(03):12-21.

**作者简介:**

李光明(1973--),男,福建松溪人,汉族,大学本科,工程师,从事工作:地壳形变研究和GPS观测、数据处理等形变研究工作。

**基金项目:**

厦门地区地壳垂直形变场时空变化特征分析研究。