第 2 卷◆第 4 期◆版本 1.0◆2019 年 8 月
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4732

基于非线性模型的参数估计的验算

陈素贞
上海市建筑科学研究院
DOI:10.32629/gmsm.v2i4.292

[摘　要] 本文首先分析了测量上的函数误差模型,针对常用的非线性模型,研究了其常用的参数估计方法,并采用实例验算,论证了模型参数估计的正确性。
[关键词] 非线性；最小二乘；参数估计

引言

线性模型是数理统计学中发展比较早的分支之一,测量上对非线性参数模型估计理论的研究相对较晚,较深入的研究是二十世纪八十年代后期。1985年以来,国际著名大地测量学者PJ.QTeunissne在非线性参数模型估计方面作了卓有成效的研究,他先后研究了非线性模型最小二乘估计的一、二阶矩,阐述了非线性模型中非线性强度的识别、度量指标以及非线性模型曲率的几何意义等,通过对展开式中舍去项造成函数模型偏差的研究,提出了从舍去项中寻找对函数模型和参数的影响,然后对函数模型和参数的估值进行修正的思想。Blalla研究了非线性最小二乘的无迭代求解理论。Lohse研究了非线性模型的参数估计理论。Ahtnaasios Demrnais和Femnad Sanso研究了可容许和不可容许非线性估计原理,提出了非线性估计的Byaes方法。

我国的测量学者对非线性参数模型估计中一些问题作过的研究有:徐培亮研究了非线性函数的协方差传播公式。刘大杰、黄加纳研究过非线性最小二乘的迭代解法。武汉大学博士学位论文非线性半参数模型最小二乘估计理论及应用研究。周世健研究了广义方差—协方差的传播问题。刘国林、陶华学在非线性参数模型估计方面作了一些较系统的研究工作,主要是对非线性模型展开后取至二次项,研究了这种新模型下的平差问题(如秩亏自由网平差)和协因数的传播问题。胡圣武、陶本藻对非线性参数模型估计的统计性质进行了研究,并将其应用到 GIS 中。王新洲对非线性参数模型估计理论作了系统的研究,研究了非线性参数模型估计的算法和非线性模型中单位权方差的估计,提出了非线性模型线性近似时的容许曲率概念,给出了非线性模型能否线性近似的实用判据,导出了非线性参数模型估计的直接解法和非线性参数模型估计中单位权方差的估计公式川。

1 测量学上的函数误差模型

测量平差与数据处理所涉及到的误差模型大多数为非线性模型。对非线性模型做线性化处理必然导致信息的损失和特征的改变。因此在非线性模型空间内进行测量平差与数据处理是学科发展的必然趋势。

测量平差与数据处理所涉及到的误差模型基本上是两种：函数误差模型和随机误差统计模型。随机误差模型主要用于观测值权的估计。对于函数误差模型,测量学上大致有两种情况：(1)结构关系模型即函数关系明确,模型误差由参数测量的不准确引起。例如,平面上三角形的三内角和为 180º,这一函数关系明确,模型误差由实际测量角误差产生；(2)相关关系模型即函数关系不明确,模型误差由函数关系、参数的数量及参数的测量误差引起。例如,在确定 GPS 水准高程时,高程异常的模拟函数的选择带有主观性,函数关系不十分明确。

2 非线性模型参数估计的方法

一个特性未知的非线性模型,在判断对其采用什么样的数据处理方法前,应对其做出明确的强度判断。目前国内外提出了七种非线性强度的度量指标,即：(1)最大固有曲率(IN)；(2)最大参数效应曲率(PE)；(3)二阶余项；(4)参数偏差；(5)残差偏差；(6)类权 K 因子；(7)百分偏差。

非线性模型参数的估计准则主要有最小二乘估计准则、极大似然估计准则、稳健估计准则及 Bayes 准则等,其中应用最为广泛的准则是最小二乘准则。非线性模型参数估计的解算方法包括最小二乘近似解法、迭代解法、直接解法及单纯形法、模拟退火算法和遗传算法等随机搜索法。

2.1 最小二乘估计的近似解法

最小二乘估计的近似解法有两种,一种是参数变换,一种是线性近似。当非线性观测方程的固有曲率较小,而参数效应曲率较大,可先设法对非线性模型进行参数变换,使得非线性模型在新参数下,参数效应曲率小于容许曲率,或者在新参数下使参数效应立体阵为 0,然后再在新参数下对费线性模型进行线性化。用参数变换的方法转化为线性模型。利用最小二乘法,求出模型参数,理论依据为残差平方和最小。由于使用了变量代换,因而计算出的回归方程不能保证残差平方和最小,甚至偏差很大。韦博成在 1989 年证明了当参数变换满足微分方程时,非线性模型在新参数 Y 下的参数效应立体阵为 0。由于求解上式方程几乎不可能,因此这种方法只有理论意义。它只是从理论上证明了参数变换后在新的参数下进行线性化近似求解非线性模型的可能性,

但难以实际应用。

$$L = f(X) + \Delta \tag{1}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \emptyset*(X)}{\partial X^2} = \left[\frac{\partial \emptyset*(X)}{\partial X}\right][\varsigma] \\ \varsigma = [(B^T B)^{-1} B^T][\omega] \end{cases} \tag{2}$$

2.2 最小二乘参数估计的迭代解法

对于非线性强度较强的非线性模型,由于线性近似将产生大于观测误差的模型误差,所以一般采用迭代的方法求解。求非线性模型的非线性最小二乘估计,就是求参数 X 的估值使得：此式等价于为目标函数的非线性无约束最优化问题。

$$V(\hat{X})^T V(\hat{X}) = (f(\hat{X}) - L)^T (f(\hat{X}) - L) = min \tag{3}$$

$$R(\hat{X}) = f^T(\hat{X}) f(\hat{X}) - 2 f^T(\hat{X}) L = min \tag{4}$$

具体的最小二乘参数估计的迭代解法有 Guass-Newton 法,切线法,信赖域法,Quisi-Newton 法,阻尼最小二乘法,同伦算法。

2.3 最小二乘参数估计的直接解法

对于非线性模型,除了近似解法和迭代解法外,还有直接解法,即将非线性模型展开至高次项直接进行解算,有顾及一次项的直接解法、顾及二次项的直接解法、顾及三次项的直接解法等。

2.4 最小二乘参数估计的其他解法

前面介绍的各种算法,都需要求导计算,当 f(X)比较复杂时,求导很困难。尤其是当 f(X)不可微时,前面的各种方法均不能应用。还有几种无需求导计算的直接搜索算法,包括单纯形法,模拟退火算法,遗传算法。

3 非线性最小二乘参数估计的算例

空间直角坐标的转换在大地测量、摄影测量中扮演着重要的角色。在大地测量中,经常会用到 WGS-84 与北京 54 坐标系或与地方坐标系之间的坐标转换；摄影测量中,空间后方交会、共线方程的建立都要用到空间直角坐标的转换。通常的工作中,往往采用小角度的空间直角坐标转换模型,即使有大角度的转换,一般也对作业方法进行改进,使大角度转变成小角度,再采用小角度的空间直角坐标转换模型。这样做的主要原因是在大角度的空间直角坐标转换中,需要处理非线性的问题。若采用独立未知数,即 3 个平移参数、3 个旋转参数、1 个尺度参数,而旋转矩阵 9 个参数中,仅有 3 个是独立的,其余 6 个是非独立的,且与独立旋转参数的关系较为复杂。针对大角度的转换,可采用最小二乘估计的迭代算法。

坐标转换模型：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

矩阵 M 表示为：

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

旋转矩阵 M 为正交矩阵,M 矩阵中,仅有 3 个独立参数,如选取 a2、a3、b3 为独立参数,则其余 6 个参数为：

$$a_1 = \sqrt{1 - a_2{}^2 - a_3{}^2}$$
$$c_3 = \sqrt{1 - a_3{}^2 - b_3{}^2}$$
$$b_1 = \frac{-a_1 a_3 b_3 - a_2 c_3}{1 - a_3}$$
$$b_2 = \sqrt{1 - b_1{}^2 - b_3{}^2}$$
$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$
$$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \tag{7}$$

有 7 个独立参数,若有 3 个以上的公共点,应用最小二乘法解即可。但是旋转矩阵中只有三个独立参数,其余六个参数是其非线性函数,因此直接解算非常复杂。所以采用下列方法予以解决。

设未知数为 3 个平移参数、1 个尺度参数、9 个方向预先参数,将(1)式用泰勒级数展开可得

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0^0 \\ Y_0^0 \\ Z_0^0 \end{bmatrix} + \mu^0 \begin{bmatrix} a_1{}^0 & a_2{}^0 & a_3{}^0 \\ b_1{}^0 & b_2{}^0 & b_3{}^0 \\ c_1{}^0 & c_2{}^0 & c_3{}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} a_1{}^0 x_i + a_2{}^0 y_i + a_3{}^0 z_i \\ b_1{}^0 x_i + b_2{}^0 y_i + b_3{}^0 z_i \\ c_1{}^0 x_i + c_2{}^0 y_i + c_3{}^0 z_i \end{bmatrix} d\mu +$$
$$\begin{bmatrix} \mu_{x_i}^0 & \mu_{y_i}^0 & \mu_{z_i}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{x_i}^0 & \mu_{y_i}^0 & \mu_{z_i}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{x_i}^0 & \mu_{y_i}^0 & \mu_{z_i}^0 \end{bmatrix} \bullet$$
$$\begin{bmatrix} da_1 & da_2 & da_3 & db_1 & db_2 & db_3 & dc_1 & dc_2 & dc_3 \end{bmatrix}^T \tag{8}$$

写成误差方程形式：

$$V_i = AX_i - L_i, \; i = 1,2,\ldots,\; n \tag{9}$$

并可列出条件方程

$$BX + W = 0 \tag{10}$$

按照附有条件的间接平差法进行解算。解算时,根据改

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4732

正数的大小判别是否满足收敛要求,如不满足,进行迭代计算,直到满足收敛要求。

计算数据

给定一套空间直角坐标(X,Y,Z)和假定的 13 参数如表1,计算出转换后的坐标(x,y,z),并将源数据和转换后数据列于表 2。

表 1 假定 13 参数

参数	数值
X0	20810.92066
Y0	-121841.8606
Z0	-1.401906
u	0.999253
a1	-0.48895
a2	0.872277
a3	-0.007748
b1	0.872152
b2	0.489011
b3	0.014804
c1	-0.016702
c2	-0.000481
c3	0.99986

通过最小二乘估计,迭代计算13参数结果见表2:

表 2 两套空间直角坐标

表 2 最小二乘参数估计结果

参数	数值
X0	20810.920660
Y0	-121841.860644
Z0	-1.401906
u	0.999253
a1	-0.488950
a2	0.872277
a3	-0.007748
b1	0.872152
b2	0.489011
b3	0.014804
c1	-0.016702
c2	-0.000481
c3	0.999860

通过跟已知13参数取相同小数位数进行比较,计算结果几乎一致,验证了算法的正确性。

[参考文献]

[1]张松林,王新洲.非线性模型的一种半参数估计方法[J].测绘通报,2004(11):65-68.

[2]宁亚飞,潘中华,陈性义,等.基于非线性模型高精度参数估计的新解法[J].工程地球物理学报,2011(10):635-638.

[3]陈国华,韦程东,蒋建初.数学模型与数学建模方法[M].天津:南开大学出版社,2012:53.