

浅析GM(1,1)模型在隧道变形监测中的应用

刘长瑞

甘肃铁道综合工程勘察院有限公司

DOI:10.32629/gmsm.v3i3.718

[摘要] 本文在隧道变形监测的基本知识的基础上,重点讲述GM(1,1)基本理论、适用条件,运用GM(1,1)模型对隧道收敛及沉降观测数据进行分析判断,得出用GM(1,1)模型可在短期内用于变形监测数据的预测。

[关键词] GM(1,1)模型; 最小二乘; 变形预测

引言

在隧道工程施工期间,为了监测隧道安全和稳定情况,了解隧道施工对周边岩土体的扰动及围岩在施工中的实际应力状态及其变形,隧道变形监测便显得尤为重要。传统方法一般是采用全站仪及收敛计等测量仪器直接对隧道进行监控量测,得到隧道变形数据,用以指导隧道施工。但隧道监测受多种因素影响,包括施工机械的遮挡,隧道内灰尘的污染,监测点的布设等原因,导致一定时间内无法利用测量仪器进行监测,这就需要对未来的隧道变形进行估算,所以通过对先前变形观测成果进行归纳分析,但变形观测的成果往往杂乱无章,故利用可靠的数学模型进行变形预测这就十分有必要。灰色预测(grey prediction)是利用灰色系统理论就灰色系统所作的预测。灰色系统理论认为,尽管系统表象复杂,数据散乱,信息不充分,但作为系统,它必然有整体功能和内在规律,必然是有序的。现有的分析方法大多依据过去的大量数据,按照统计方法分析其规律,这样不仅受数据量的限制,而且准确程度不高。而灰色系统理论把随机量看作是在一定范围内变化的灰色量,对灰色量的处理不是寻求它的统计规律和概率分布,而是对原始数据加以处理,将杂乱无章的原始数据变为规律性较强的生成数据,通过对生成数据建立动态模型,来挖掘系统内部信息并充分利用信息进行分析预测。

目前,灰色系统理论用于预测主要通过GM(m, n)模型,该模型是灰色系统理论的量化体现,可用于以下几个方面的预测:

(1) 数列预测: 对某个事物发展变化的大小与时间进行预测。

(2) 灾变预测: 预测灾变发生的时间或者说是异常值出现时区的分布。如人体的血压过高或过低的时间预测。

(3) 季节性灾变预测: 对发生在每年特定时间的事件和命题作预测。

(4) 拓扑预测: 即事物整体的预测,亦称波形预测。其特点是对于预先给定的多组数值建立GM(1, 1)模型群,根据预测结果构造出整个波形。

(5) 系统预测: 对系统中众多变量间相互协调关系的发展变化所进行的预测。

这里主要讲述GM(1, 1)模型在隧道变形监测中的应用。

1 GM(1,1)模型理论

GM(1, 1)模型由一个单变量的一阶微分方程构成。它主要用于复杂系统某一主导因素特征值的拟合和预测,以揭示主导因素变化规律和未来发展变化态势。GM(1, 1)模型将原始数据认为在混乱的次序背后,必然隐藏某种规律,并利用模型去发掘和寻找这种内在整体特性,根据规律的趋势分析,归纳总结出引起变形的原因、规律,从而可得出未来发展的变形量,并预报未来变形值的范围,从而判断隧道的安全程度,用以指导隧道施工,确保安全。

2 建立模型预测分析

本文实例是对隧道收敛及沉降进行预测,由于变量受多种因素影响,而且在短时间内无规律可循,故可认为它是一个灰色系统。为此对变形值进行灰色预测。

由于原始数据是由等时间间隔观测的某一监测点的变形值组成,故原始数据列 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ (其中, $x^{(0)}(n)$ 为第 n 个变形观测值) 必定是非负数据列,但是由于周边岩土体的地质复杂性和离散性以及一些突发和偶然情况等随即因素,不能保证 $x^{(0)}$ 是单调的,即 $x^{(0)}$ 可能是摆动的,应该采用累加的方法生成中间数据。设 $x^{(1)}(n)$ 是前 n 个沉降观测值的历史数据累加值,则原始数据列经一次累加生成的数据列为 $x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$ 。

其中:

$$x^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^t x^{(0)}(k)$$

又由于变形观测值为零的情况不会出现,因而变形观测值经一次累加就可以得到单点递增的非负数据列,呈现出某种规律性。这就可以采用微分拟合建模的方法,建立单变量一阶线性微分模型,即GM(1, 1)灰色预测模型,其形式为:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$$

利用常数变易法解得该微分方程的解为:

$$x^{(1)}(t+1) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-at} + \frac{b}{a} \quad (t=0, 1, 2, \dots)$$

则:

$$x^{(0)}(t+1) = x^{(1)}(t+1) - x^{(1)}(t)$$

利用最小二乘法可求得参数 a 和 b 的解(向量形式)为

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [A^T A]^{-1} A^T Y_n, \text{ 其中}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x^{(1)}(3) + x^{(1)}(2)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}[x^{(1)}(n) + x^{(1)}(n-1)] & 1 \end{bmatrix}, Y_n = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

这就是累加数据的预测模型。

由式 $x^{(1)}(t+1) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-at} + \frac{b}{a}$ ($t=0,1,2,\dots$) 计算得到的 $x^{(1)}(t+1)$ 是累加数据的模型的计算值, 为了得到未来观测时间点的变形观测值的模型预测值, 还应对上述结果进行累减还原

$$\hat{x}^{(1)}(K+1) = (x^{(0)}(1) - \frac{\mu}{a}) e^{-ak + \frac{\mu}{a}}$$

$$x^{(0)}(t+1) = x^{(1)}(t+1) - x^{(1)}(t) = (1 - e^a) \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-at}$$

由上式所得的计算值就是未来观测时间点沉降观测值的模型预测值。同时还需对预测值进行检验, 具体方法如下:

①残差检验: 设 $x^{(0)}$ 为原始数列

$$x^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

设 $\hat{x}^{(0)}$ 为通过模型 (11-52) 和 (11-53) 得到的预测数据列

$$\hat{x}^{(0)} = \{\hat{x}^{(0)}(2), \hat{x}^{(0)}(3), \dots, \hat{x}^{(0)}(n)\}$$

则称 $\Delta(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$ 为残差, 称

$$\varepsilon(k) = \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} 100\%$$

为GM(1, 1)的残差相对值, 若残差小于0.1, 则称精度达到较高要求; 若残差介于0.1与0.2之间, 则称精度达到一般要求; 若残差大于0.2, 则模型不可靠。

②级比偏差值检验: 与原始数列级比

$$\sigma^{(0)}(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}, \quad k \geq 3$$

一样, 我们定义模型级比

$$\hat{\sigma}^{(0)}(k) = \frac{\hat{x}^{(0)}(k-1)}{\hat{x}^{(0)}(k)}, \quad k \geq 3$$

推导可知, 模型级比与k无关 (因为 $\{\hat{x}^{(0)}(k)\}$ 符合指数律)

$$\hat{\sigma}^{(0)}(k) = \hat{\sigma}^{(0)} = \frac{1 + 0.5a}{1 - 0.5a}, \quad k \geq 3$$

其中a为发展系数。定义级比偏差

$$\rho(k) = \frac{\hat{\sigma}^{(0)} - \sigma^{(0)}(k)}{\hat{\sigma}^{(0)}} 100\% = 1 - \frac{1 - 0.5a}{1 + 0.5a} \cdot \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}$$

一般要求 $|\rho(k)| < 20\%$, 最好 $|\rho(k)| < 10\%$;

3 GM(1,1)模型用于变形分析实例

本文以陇漳高速公路张家坪隧道拱顶沉降监测数据为例, 利用已经得到的监测数据, 基于GM(1, 1)灰色模型对监测数据进行分析 and 预测, 选择2019年6月10日~6月22日期间的拱顶沉降观测数据为基础, 以3天为距离, 看作是原始数据列, $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(5))$ 即 $x^{(0)} = \{2.45, 3.37, 3.98, 4.78, 5.72, 6.72\}$, 利用MATLAB软件处理得到参数 $a = -0.17, b = 2.6548$, 预测方程为 $x^{(0)}(t+1) = 18(1 - e^{-0.17t})e^{0.17t}$, 代入时间参数 t 便可预测2019年6月25日~7月4日隧道GD87号拱顶下沉观测点的沉降值。计算软件界面及预测结果如下所示:

```

>> x=[2.45 3.37 3.98 4.78 5.72 6.72]';
n=length(x); %取输入数据的样本量
z=0;
for i=1:n %计算累加值,并将值赋予矩阵be
    z=z+x(i,:);
    be(i,:)=z;
end
for i=2:n %对原始数列平行移位
    y(i-1,:)=x(i,:);
end
for i=1:n-1 %计算数据矩阵B的第一列数据
    c(i,:)=0.5*(be(i,:)+be(i+1,:));
end
for j=1:n-1 %计算数据矩阵B的第二列数据
    e(j,:)=1;
end
for i=1:n-1 %构造数据矩阵B
    B(i,1)=c(i,:);
    B(i,2)=e(i,:);
end
alpha=inv(B.'*B)*B.'*y; %计算参数a、b矩阵
for i=1:n+3 %计算数据估计值的累加数列,如改n+1为n+m可预测后m-1个值
    ago(i,:)=(x(1,:)-alpha(2,:)/alpha(1,:))*exp(-alpha(1,:)*(i-1))+alpha(2,:)/alpha(1,:);
end
var(1,:)=ago(1,:);
for i=1:n+2 %如改n为n+m-1,可预测后m-1个值
    var(i+1,:)=ago(i+1,:)-ago(i,:); %估计值的累加数列的还原,并计算出下一预测值
end
for i=1:n
    error(i,:)=var(i,:)-x(i,:); %计算残差
end
c=std(error)/std(x); %调用统计工具箱的标准差函数计算后验差的比值c
ago %显示输出预测值的累加数列
alpha %显示输出参数a、b数列
var %显示输出预测值
error %显示输出误差

x =

    2.4500
    3.3700
    3.9800
  
```

表1 张家坪隧道拱顶沉降观测点沉降值的灰色预测结果

时间序号t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
实测时间	6-10	6-13	6-16	6-19	6-22	6-25	6-28	7-1	7-4
实测值/mm	2.45	3.37	3.98	4.78	5.72	6.72	7.93	9.46	11.20
预测值/mm	2.4500	3.3617	3.9973	4.7529	5.6515	6.7199	7.9903	9.5009	11.2971
残差/mm	0.0000	-0.0083	0.0173	-0.0271	-0.0685	-0.0001	0.0603	0.0409	0.0971
级比偏差值检验值	0.0000	-0.0025	0.0043	-0.0057	-0.0120	0.0000	0.0076	0.0043	0.0087

4 MATLAB软件GM(1,1)模型程序代码

```

x=[2.45 3.37 3.98 4.78 5.72 6.72]';
n=length(x); %取输入数据的样本量
  
```

```
z=0;
for i=1:n %计算累加值, 并将值赋予矩阵be
    z=z+x(i, :);
    be(i, :)=z;
end
for i=2:n %对原始数列平行移位
    y(i-1, :)=x(i, :);
end
for i=1:n-1 %计算数据矩阵B的第一列数据
    c(i, :)=0.5*(be(i, :)+be(i+1, :));
end
for j=1:n-1 %计算数据矩阵B的第二列数据
    e(j, :)=1;
end
for i=1:n-1 %构造数据矩阵B
    B(i, 1)=c(i, :);
    B(i, 2)=e(i, :);
end
alpha=inv(B.'*B)*B.'*y; %计算参数a、b矩阵
for i=1:n+3 %计算数据估计值的累加数列, 如改n+1
    为n+m可预测后m-1个值
        ago(i, :)=(x(1, :)-alpha(2, :)/alpha(1, :))*exp(-alpha(1, :)*(i-1))+alpha(2, :)/alpha(1, :);
    end
    var(1, :)=ago(1, :)
    for i=1:n+2 %如改n为n+m-1, 可预测后m-1个值
        var(i+1, :)=ago(i+1, :)-ago(i, :); %估计值的累加数列的
        还原, 并计算出下一预测值
    end
    for i=1:n
        error(i, :)=var(i, :)-x(i, :); %计算残差
```

```
end
c=std(error)/std(x); %调用统计工具箱的标准差函数
计算后验差的比值c
ago %显示输出预测值的累加数列
alpha %显示输出参数a、b数列
var %显示输出预测值
error %显示输出误差
```

5 总结

由上表可知, 预测值残差最大值为0.0971, 均小于0.1, 模型精度较高, 级比偏差值最大为0.0087, 均小于0.1, 达到较高要求精度, 所以模型对已知的历史数据拟合良好, 对未来3天的沉降值预测精度高, 表明该方法应用于隧道的变形预测是可行有效的。此外, 灰色预测对其它工程变形如基坑工程变形及建构物的沉降等等, 该模型预测同样适用。

灰色预测的优点是不需要大的样本量, 可以利用一些贫信息、灰信息进行预测, 使数据形成指数律, 从而建立统一的微分方程, 求得拟合曲线后对对象的将来发展值进行预测, 本质上可认为该预测是指数预测模型。然而, 通过在实践中发现, 此模型的拟合或预测效果有时好, 有时出现很大偏差, 甚至完全失效。究其原因如下:

(1) 灰色预测模型从本质上可认为是指数预测模型, 因此其预测精度与被预测对象的递变规律以及数据序列的光滑度有关。

(2) 灰色微分拟合法建立的离散拟合方程是一个近似差分方程, 因而很难保证拟合方程与待拟合系统的微分方程严格近似, 也就无法保证所建立的灰色模型的固有误差为无穷小量。因此该方法不能进行长期预测, 因此需要不断更新历史数据使得预测更准确。

[参考文献]

- [1] 邓聚龙. 灰色系统理论教程[M]. 华中理工大学出版社, 1990.
- [2] 陈永奇, 吴子安, 吴中如. 变形监测分析与预报[M]. 测绘出版社, 1998.
- [3] 欧阳群霞. 灰色GM(1,1)模型在基坑变形监测中的应用[J]. 四川建材, 2010(6): 74-75.
- [4] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国. 灰色系统理论及其应用[M]. 科学出版社, 1999.